

# Specifiche sul regime transitorio

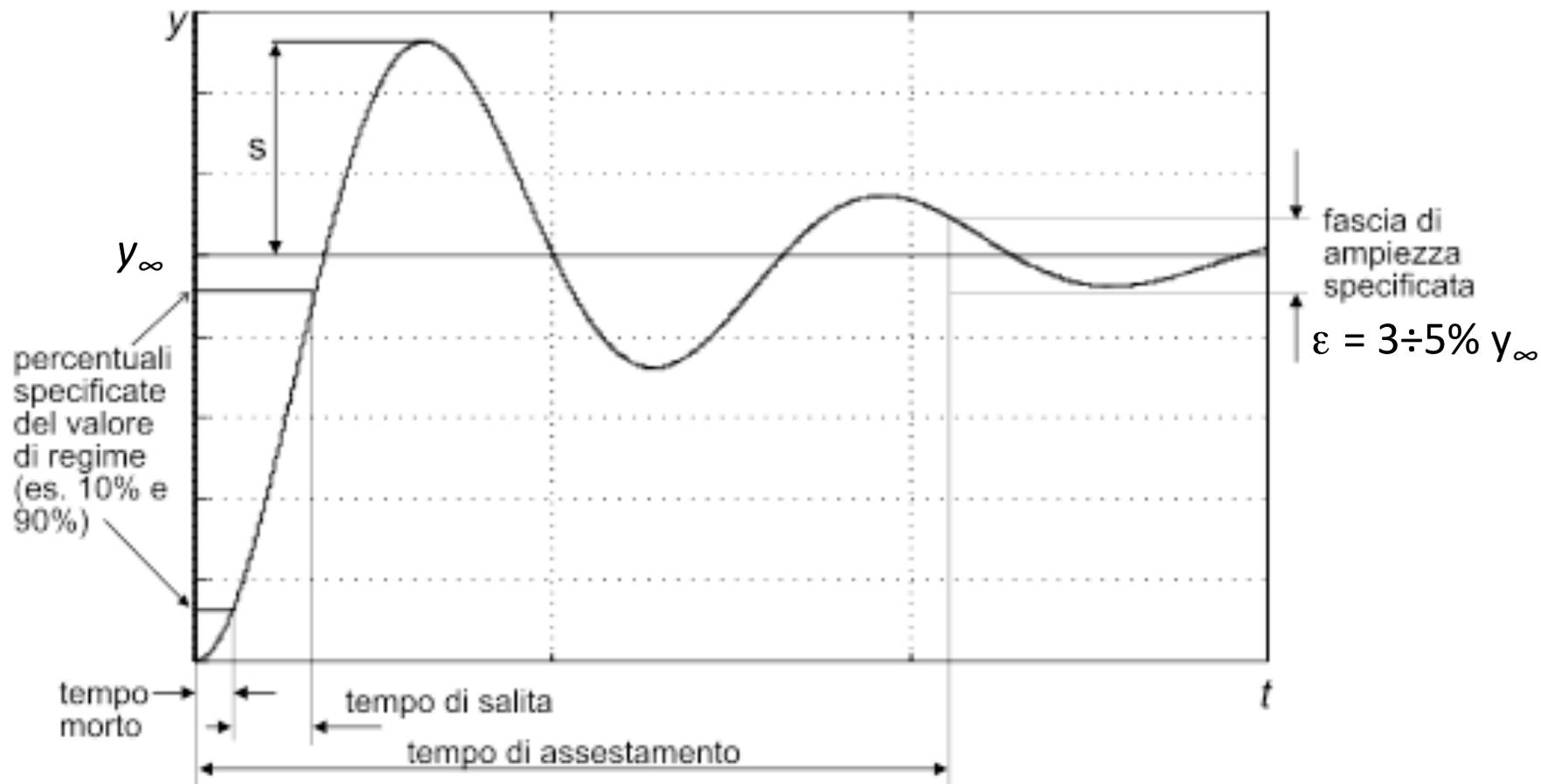
trasformazioni tempo  $\Rightarrow$  frequenza  
per sistemi di controllo del 1° e 2° ordine

Fondamenti di Automatica

2015-16

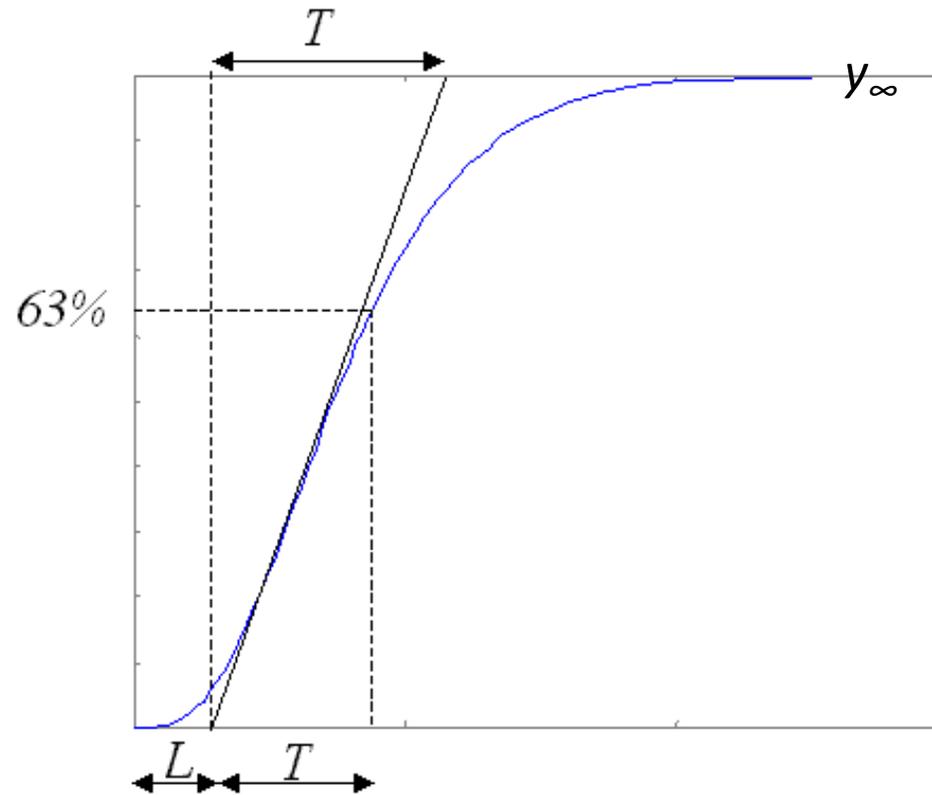
A. De Luca, 2 Dicembre 2015

- parametri nella **risposta indiciale** (a gradino unitario) di un sistema dinamico lineare



tempo di salita, sovraelongazione, tempo di assestamento, valore di regime, ....

- parametri nella **risposta indiciale** (a gradino unitario) di un sistema dinamico lineare



altro possibile  
andamento  
della risposta

tempo di salita, tempo di assestamento, valore di regime, ....

- sistema di controllo del **primo ordine** (tipo 0)

$$W(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad W(0) = 1 \quad G(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)} = \frac{1/\tau}{s}$$

$$\tau > 0$$

- risposta indiciale (gradino unitario, dallo stato zero) e modulo risposta armonica

$$y(t) = L^{-1} \left[ W(s) \frac{1}{s} \right] = 1 - e^{-t/\tau} \quad |W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

- tempo di salita, sovraelongazione, modulo alla risonanza, banda passante

istante  $t_s > 0$ :  $\dot{y}(0)t_s = 1 \Rightarrow t_s = \tau$       istante  $t_r > 0$ :  $y(t_r) = 0.5 \Rightarrow t_r \approx 0.69\tau$

$|y(t)| \leq 1, \forall t \geq 0 \Rightarrow \hat{s} = 0$  (assente)       $|W(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \geq 0 \Rightarrow M_r = 0$  (assente)

pulsazione  $\omega = B_3$ :  $|W(jB_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB} \Rightarrow B_3 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow B_3 \cdot t_s = 1$

- parametri risposta in frequenza **anello chiuso**  $\Rightarrow$  **anello aperto**

$$\omega_t = B_3 = \frac{1}{\tau}$$

$$m_\varphi = 90^\circ$$

- sistema di controllo del **secondo ordine** (tipo 0)

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad W(0) = 1 \quad G(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)}$$

$$\omega_n > 0 \quad = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n / 2\xi}{s \left(1 + \frac{1}{2\xi\omega_n} s\right)}$$

$$0 < \xi < 1$$

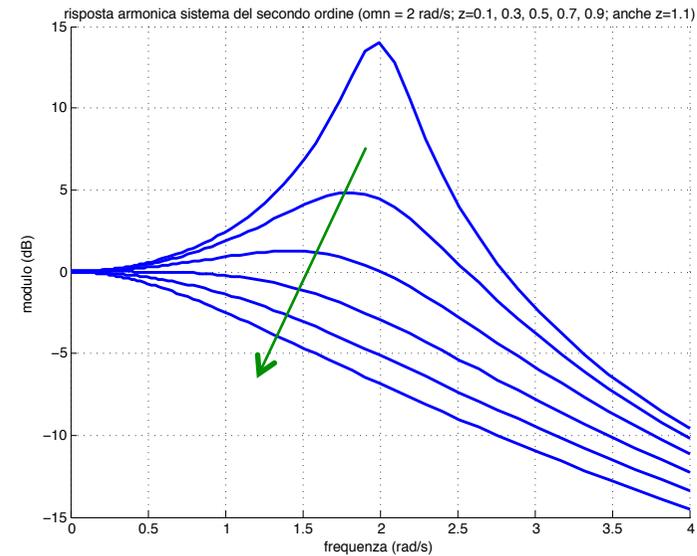
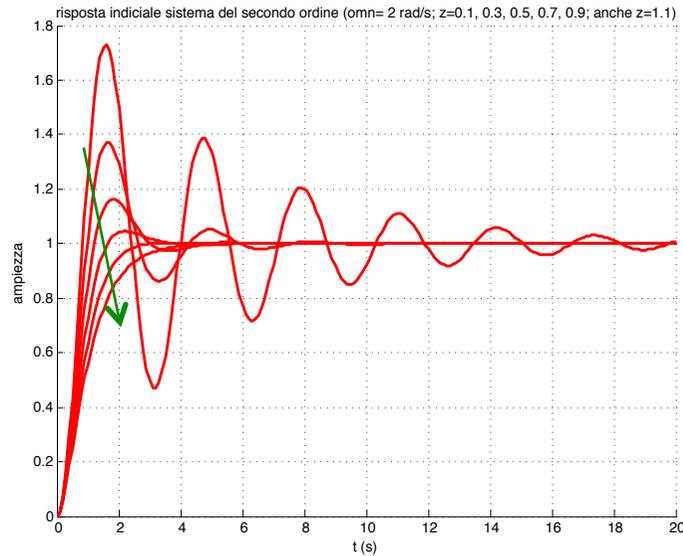
- risposta indiciale (al gradino unitario, dallo stato zero)

$$y(t) = L^{-1} \left[ W(s) \frac{1}{s} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left( \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)$$

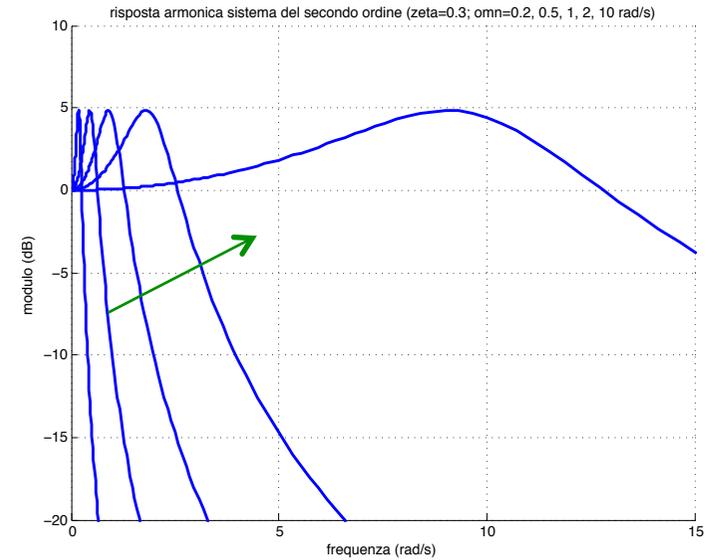
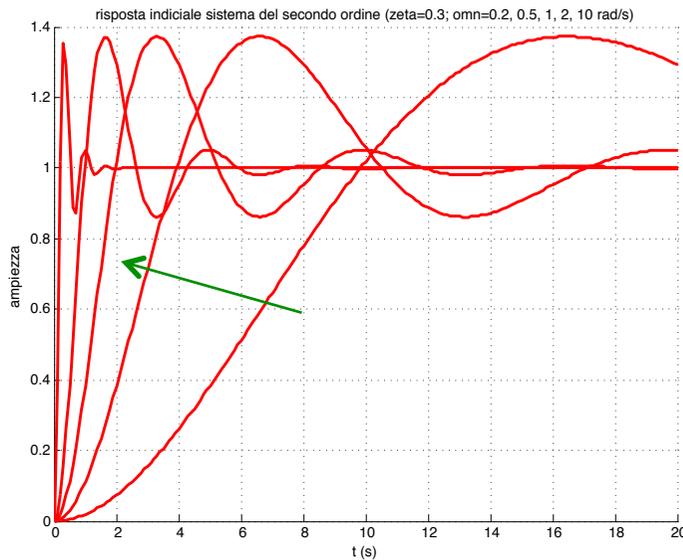
- modulo della risposta armonica

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

- risposta indiciale e risposta armonica ad anello chiuso al variare di  $\zeta$  ( $\omega_n = 2$  rad/s)



- risposta indiciale e risposta armonica ad anello chiuso al variare di  $\omega_n$  ( $\zeta = 0.3$ )



- tempo di salita della risposta indiciale

primo istante  $t_s > 0$ :  $y(t_s) = 1$

$$\Rightarrow t_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left( \pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \frac{1}{\omega_n} \hat{t}_s(\zeta)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} t_s = \infty \quad (\text{non interseca mai il valore di regime}) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} t_s = \frac{\pi}{2\omega_n} = \frac{T_n}{4} \quad (\text{un quarto del periodo di una sinusoide a pulsazione } \omega_n)$$

- sovraelongazione della risposta indiciale

primo istante  $t_m > 0$ :  $\dot{y}(t_m) = 0 \Rightarrow y(t_m) = 1 + \hat{s}$

$$\Rightarrow \hat{s} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

il valore al primo  
“massimo” della risposta  
(vale anche  $\dot{y}(0) = 0$ ,  
ma è un minimo)

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \hat{s} = 0 \quad (\text{non c'è nessuna sovraelongazione}) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \hat{s} = 1 \quad (\text{i picchi sono ripetuti e pari al doppio del valore desiderato di regime})$$

- tempo di assestamento a  $\pm \varepsilon$  della risposta indiciale

primo istante  $t_a > 0$ :  $\forall t \geq t_a \Rightarrow |1 - y(t)| \leq \varepsilon \Rightarrow t_a = \frac{\left| \ln(\varepsilon \sqrt{1-\zeta^2}) \right|}{\zeta \omega_n}$

- **pulsazione e modulo alla risonanza** della risposta armonica

pulsazione  $\omega_r > 0$ :  $\frac{d}{d\omega} [|W(j\omega)|]_{\omega=\omega_r} = 0 \Rightarrow M_r = |W(j\omega_r)|$

$\Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  solo per  $\zeta \leq 1/\sqrt{2} \approx 0.707$

$\Rightarrow M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$  (in termini assoluti, da esprimersi poi in dB)

- **banda passante (a -3 dB)** della risposta armonica

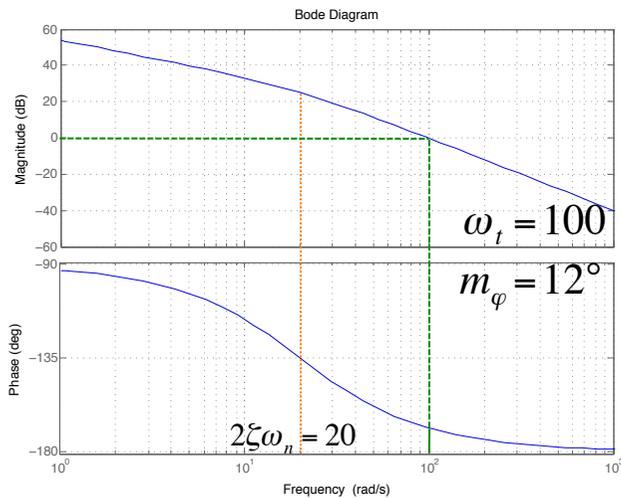
pulsazione  $\omega = B_3$ :  $|W(jB_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$

$\Rightarrow B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} = \omega_n \hat{B}_3(\zeta)$

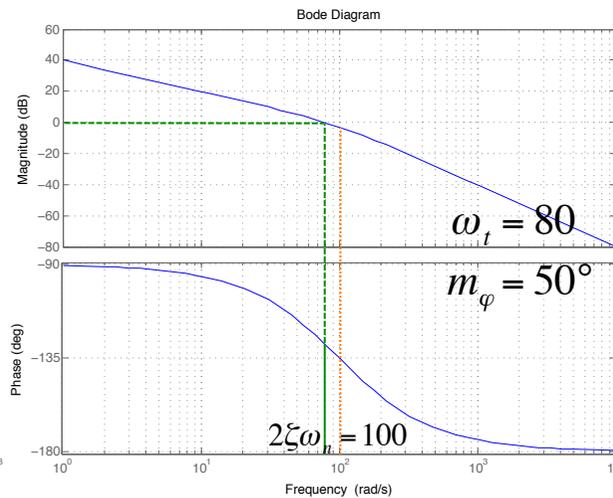
- banda passante  $\times$  tempo di salita funzione solo di  $\zeta$ :  $B_3 \cdot t_s = \omega_n \hat{B}_3(\zeta) \cdot \frac{1}{\omega_n} \hat{t}_s(\zeta) = \hat{B}_3(\zeta) \cdot \hat{t}_s(\zeta)$

- parametri risposta in frequenza **anello chiuso**  $\Rightarrow$  **anello aperto**  $G(s) = \frac{\omega_n / 2\xi}{s \left( 1 + \frac{1}{2\xi\omega_n} s \right)}$
- (assumendo  $K_G = \frac{\omega_n}{2\xi} > 1$ )
- $0 \leftarrow \xi < 0.5$ :  $\omega_t \rightarrow \omega_n^- < 1.5\omega_n \leftarrow B_3$   $m_\varphi < 45^\circ \rightarrow 0^\circ$
  - $\xi = 0.5$ :  $\omega_t = 0.8\omega_n < 1.27\omega_n = B_3$   $m_\varphi = 50^\circ$
  - $0.5 < \xi \rightarrow 1$ :  $\omega_t \rightarrow 0.5\omega_n < \omega_n \leftarrow B_3$   $m_\varphi > 45^\circ \rightarrow 90^\circ$

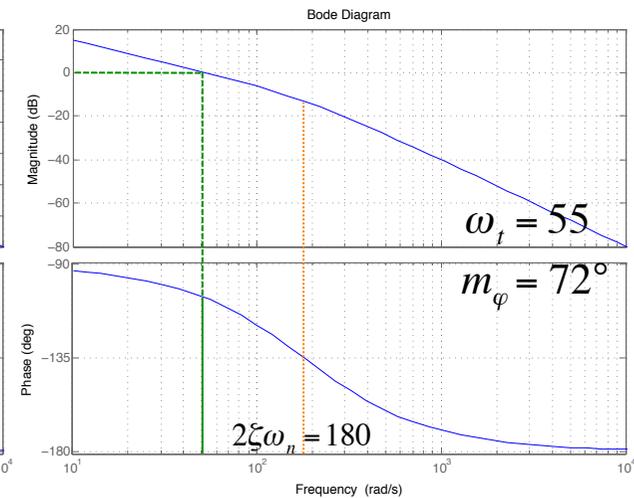
$$\omega_n = 100, \xi = 0.1$$



$$\omega_n = 100, \xi = 0.5$$



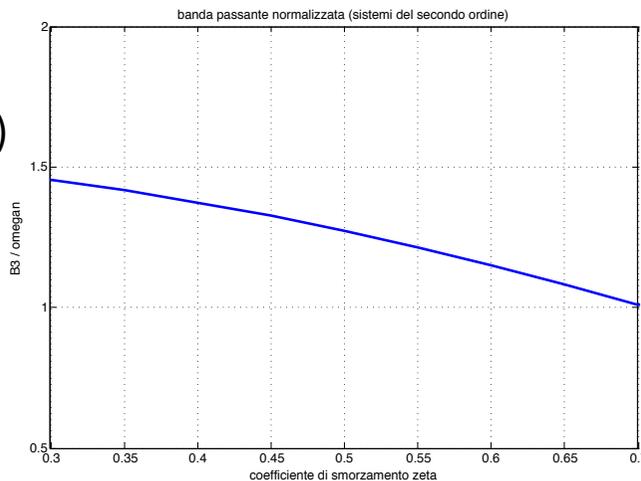
$$\omega_n = 100, \xi = 0.9$$



banda passante (normalizzata)

al variare di  $\xi$

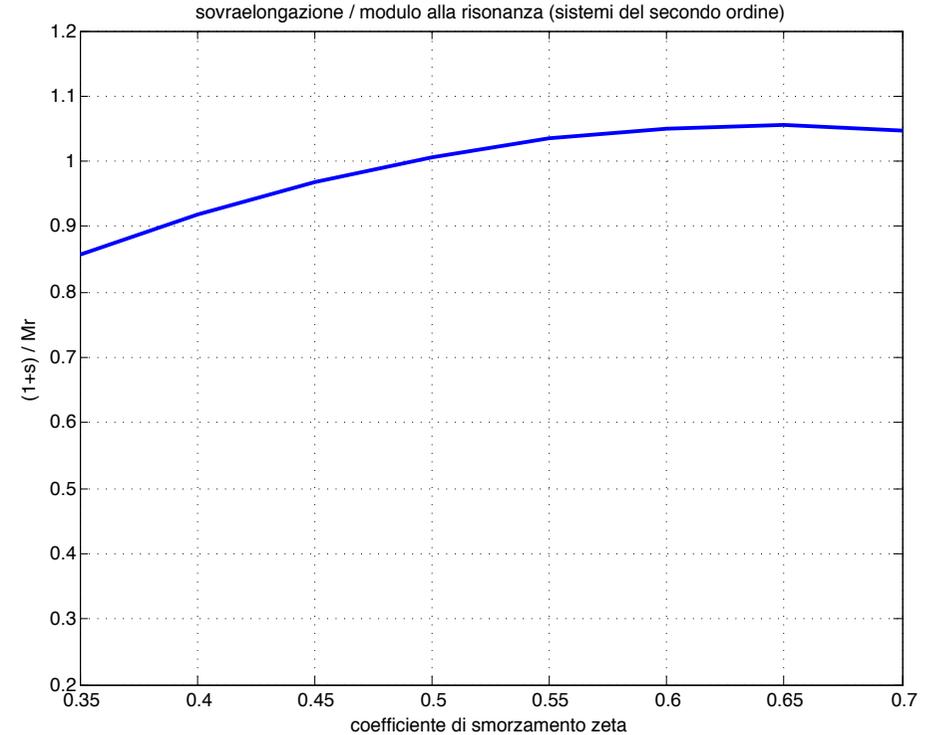
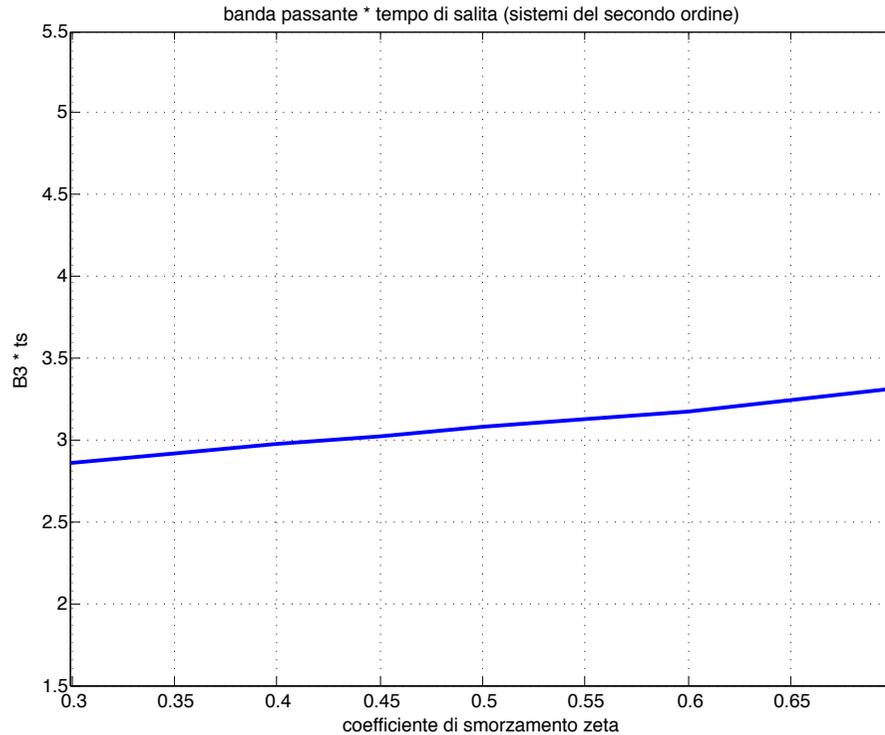
$$\frac{B_3}{\omega_n} = 1 \div 1.5$$



↓

$$\omega_t \leq B_3 \leq 1.5\omega_t$$

## legami "empirici" tra parametri delle risposte indiciale e armonica ad anello chiuso



$$B_3 \cdot t_s = \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left( \pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \approx 3$$

↑  
banda  
in rad/s

$$\frac{1 + \hat{s}}{M_r} = \left( 1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \approx 0.85$$

↑  
modulo  
NON in dB

ricavati per sistemi di controllo del **secondo ordine**,  
utilizzati anche per tipologie con coppia di **poli dominanti**

- sistema di controllo con **poli dominanti** (tipo 0)

$$W(s) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \tau s} \\ \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \end{array} \right. \times \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots} \quad W(0) = 1$$

